

Mozione dell'analisi comparativa

Dato il seguente problema e i successivi due svolgimenti del problema proposto, si discuta su quale tra le due strategie risolutive risulta preferibile. *

In una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O , è data la corda di misura $CD = \frac{1}{2} r$. Determina l'altezza DH relativa al lato OC del triangolo COD .

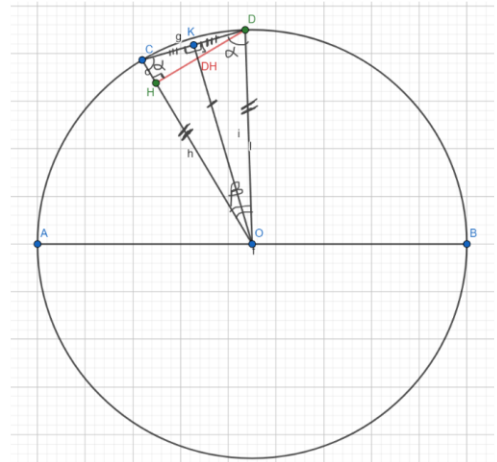
RISOLUZIONE 1:

DATI:

$$AB = 2r$$

$$CD = \frac{1}{2} r$$

$$DH = ?$$



Il triangolo COD formatosi, è un triangolo isoscele, poiché ha due lati congruenti, i quali misurano proprio il raggio, ovvero CO e OD e gli angoli alla base congruenti.

Tracciando l'altezza relativa al lato CD , si verranno a formare due triangoli: COK e OKD .

Quest'altezza sarà anche mediana e perciò dividerà in due parti congruenti il lato CD e quindi CK sarà congruente al lato KD ed entrambi misureranno $\frac{1}{4} r$.

I due triangoli avranno congruenti tutti e tre i lati (uno in comune), in particolare saranno congruenti per il terzo criterio di congruenza.

Applico il Primo Teorema sui Triangoli Rettangoli, il quale afferma che in ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto ad esso o per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente, per calcolare il cateto KD , del triangolo OKD , ricavando in seguito il $\cos(\alpha)$, sapendo che il lato OD è l'ipotenusa (è il lato opposto all'angolo retto e misura il raggio $= 1$, dato che il diametro $AB=2r$).

$$KD = OD * \cos(\alpha) \rightarrow \text{Divido entrambi i membri per } OD, \text{ isolando così il } \cos(\alpha).$$

$$\cos(\alpha) = KD / OD = \frac{1}{4} / 1 = \frac{1}{4}$$

Calcolo, poi, l'altezza DH del triangolo COD , nonché il cateto del triangolo CDH formatosi, applicando lo stesso teorema (sapendo che il lato CD è l'ipotenusa).

$$DH = CD * \sin(\alpha)$$

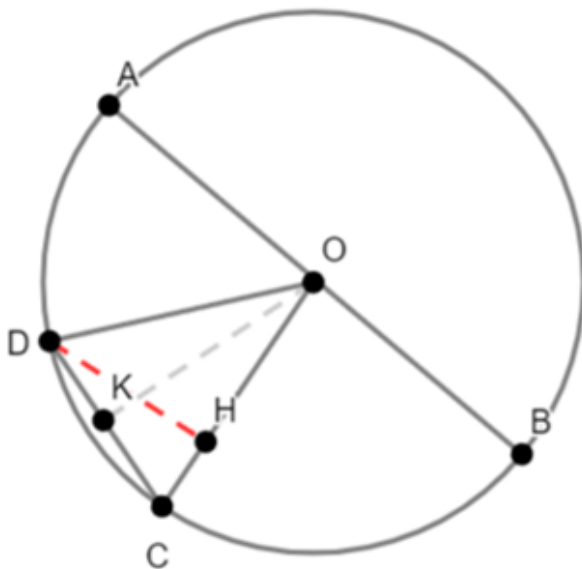
Per calcolarlo, però, occorre ricavare il $\sin(\alpha)$, così sfrutto la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \quad \text{da cui} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Posso, quindi, calcolare l'altezza DH relativa al lato OC del triangolo COD:

$$DH = CD \cdot \sin(\alpha) \quad \text{da cui si ricava} \quad DH = \frac{\sqrt{15}}{8} r$$

RISOLUZIONE 2:



$$AB = 2r \qquad CD = \frac{1}{2}r \qquad DH = ?$$

Dopo aver costruito la figura, si può notare che il triangolo risultante è isoscele, visto che 2 dei suoi lati corrispondono ai raggi della circonferenza.

$$OC = \frac{AB}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

$$OC \cong OD$$

Successivamente, siccome la formula per trovare l'area di un triangolo è $\frac{b \times h}{2}$, è stata presa in considerazione un'altezza che non corrispondesse all'incognita e la relativa base. In particolare, è stata calcolata l'altezza OK , siccome era l'altezza del triangolo isoscele che corrispondeva anche ad una mediana e ad una bisettrice, e che divide la figura in due triangoli rettangoli congruenti. Quindi, abbiamo ricavato l'altezza mediante il teorema di Pitagora:

$$OK = \sqrt{OD^2 - CK^2} = \sqrt{OD^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{4}r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{16}r^2} = \sqrt{\frac{16r^2 - r^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}r$$

Dopodiché, si è calcolata l'area del triangolo isoscele:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{CD \times OK}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{4}r \times \frac{1}{2}r\right)}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}r^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{16}r^2$$

Infine, è stata ricavata l'incognita utilizzando la formula inversa dell'area del triangolo, prendendo in considerazione la base sulla quale l'altezza cade, cioè OC :

$$DH = \frac{2A}{b} = \frac{2A}{OC} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{8}r^2}{r} = \frac{\sqrt{15}}{8}r$$

* Le due risoluzioni sono state fornite dagli studenti, in base a quanto stabilito nel format delle *Mozioni dell'analisi comparativa*.