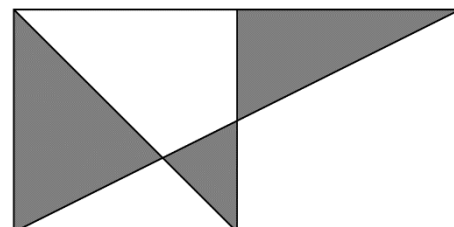


Mozione dell'analisi comparativa

Dato il seguente problema (tratto da *I Giochi di Archimede - Gara Triennio - 2018*) **e i successivi due svolgimenti del problema proposto, si discuta su quale tra le due strategie risolutive risulta preferibile.** *

Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti cm² è l'area complessiva della regione ombreggiata?



RISOLUZIONE 1:

Fissiamo un sistema di assi cartesiani con origine nel vertice A del rettangolo. Consideriamo i triangoli DAG, GHF e EHC, di cui abbiamo indicato le aree, rispettivamente, con T1, T2 e T3.

L'obiettivo della risoluzione è quello di conoscere le coordinate dei vertici dei tre triangoli presi in esame, in modo da calcolare le corrispondenti aree con la regola di Sarrus.

Osserviamo il triangolo DAG:

Il punto A ha coordinate (0;0)

il punto D ha coordinate (0;6)

Il punto G ha coordinate (x; y) = (4;2)

Per conoscere le coordinate del punto G mettiamo a sistema l'equazione della retta AC con quella della retta DF, in modo tale da ottenere le coordinate del loro punto di intersezione, ovvero G.

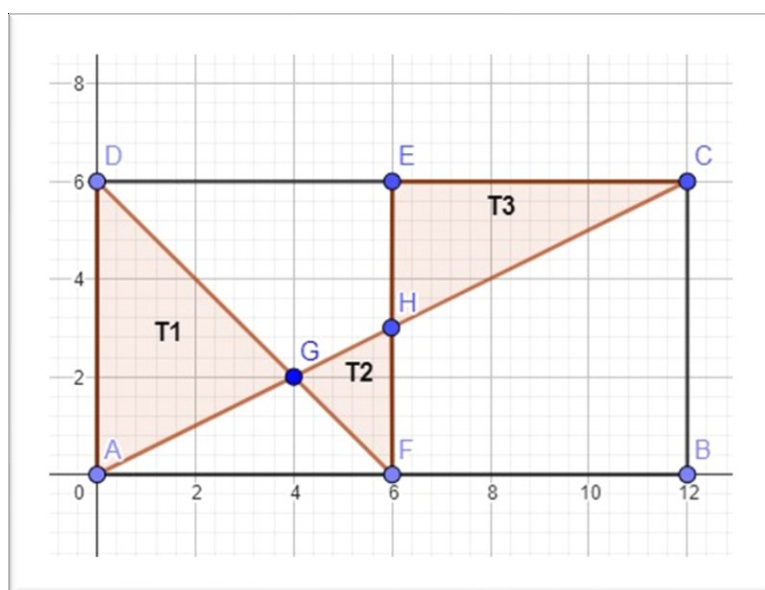
L'equazione AC è del tipo $y = mx$, poiché si tratta di una retta passante per l'origine. Consideriamo un suo punto, ad esempio C (12;6), con la formula inversa possiamo ricavare il coefficiente angolare, $m = \frac{y}{x} = \frac{12}{6} = \frac{1}{2}$. Quindi otteniamo l'equazione $y = \frac{1}{2}x$.

L'equazione DF è del tipo $y = mx + q$, in quanto è una retta non passante per l'origine. Per ricavare il coefficiente angolare, in questo caso, utilizziamo la formula che consente di calcolarlo conoscendo due punti (F e D) $m = \frac{Y_F - Y_D}{X_F - X_D} = \frac{0 - 6}{6 - 0} = \frac{-6}{6} = -1$, mentre il termine noto è pari a 6 perché è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y. Di conseguenza otteniamo l'equazione $y = -x + 6$.

Mettiamo a sistema le due equazioni ottenute:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema con uno dei metodi noti otteniamo le coordinate del punto G (4;2).



Esaminiamo ora il triangolo GHF:

Il punto F ha coordinate (6;0)

Il punto G ha coordinate (4;2)

Il punto H ha coordinate $(x; y) = (6;3)$

Per conoscere le coordinate del punto H mettiamo a sistema la retta AC e la retta EF, in modo tale da ottenere le coordinate del loro punto di intersezione che sarà proprio H.

La retta AC è stata già calcolata in precedenza ed ha equazione $y = \frac{1}{2}x$.

La retta EF è parallela all'asse y, pertanto avrà equazione del tipo $x = k$ quindi $x = 6$.

Mettiamo a sistema le due equazioni ottenute:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \text{Il punto H ha coordinate (6;3).}$$

Consideriamo, infine, il triangolo EHC:

Il punto E ha coordinate (6;6)

Il punto H ha coordinate (6;3)

Il punto C ha coordinate (12;6)

Conoscendo i vertici di tutte e tre i triangoli, possiamo calcolare le loro rispettive aree mediante la regola di Sarrus.

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 12 \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad T_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 12 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

Infine, sommiamo le 3 aree ottenute:

$$T_1 + T_2 + T_3 = (12 + 3 + 9) = 24 \text{ cm}$$

RISOLUZIONE 2:

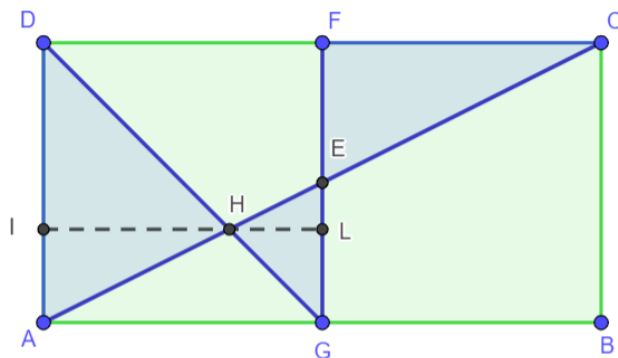
I triangoli AEG e ACB sono simili, avranno pertanto i lati omologhi in proporzione, ovvero avremo che

$$AG : AB = EG : CB$$

Da questa proporzione si ricava che EG misura 3 cm.

Anche i triangoli ADH e GEH sono simili, infatti:

- $\widehat{ADH} \cong \widehat{HGE}$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele AD e GE tagliate dalla trasversale DG;
- $\widehat{DHA} \cong \widehat{EHG}$ perché angoli opposti al vertice;
- $\widehat{HAD} \cong \widehat{HEG}$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele AD e GE tagliate dalla trasversale AE.



Data la similitudine tra i due triangoli, avremo un rapporto costante fra le dimensioni dei suoi lati. Conoscendo le dimensioni di AD e EG, possiamo determinare tale rapporto:

$$\frac{AD}{EG} = \frac{AH}{EH} = \frac{DH}{HG} = \frac{HI}{HL} = 2$$

Possiamo dunque calcolare il valore dei segmenti HI e HL risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} HI + HL = 6 \\ \frac{HI}{HL} = 2 \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene} \quad \begin{cases} HI = 4 \\ HL = 2 \end{cases}$$

Abbiamo, dunque, tutti i dati necessari per poter calcolare l'area della parte di piano colorata:

$$A = \frac{FC \cdot FE}{2} + \frac{EG \cdot HL}{2} + \frac{AD \cdot HI}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} cm^2 + \frac{3 \cdot 2}{2} cm^2 + \frac{6 \cdot 4}{2} cm^2 = 24 cm^2$$

* Le due risoluzioni sono state fornite dagli studenti, in base a quanto stabilito nel format delle *Mozioni dell'analisi comparativa*.