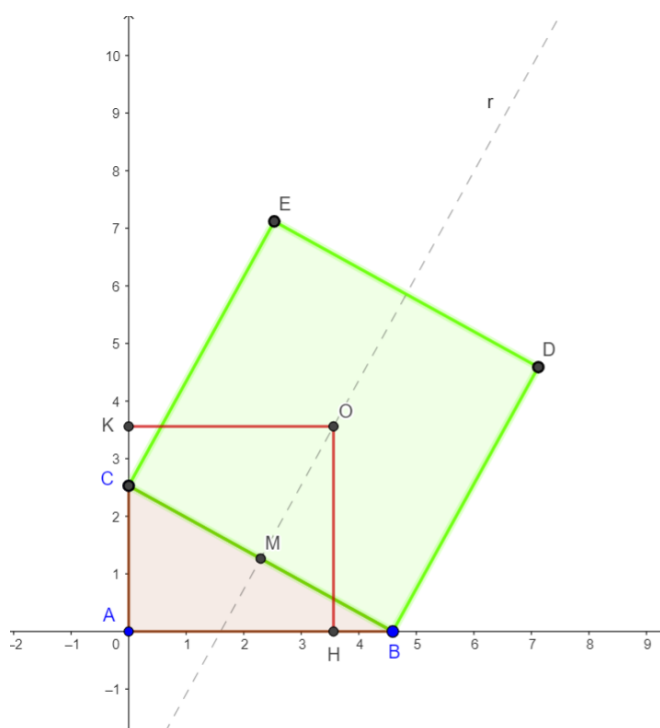


Mozione dell'analisi comparativa

Dato il seguente problema (da “Esame di Stato 2023 – sessione ordinaria”, quesito 1) e i successivi due svolgimenti del problema proposto, si discuta su quale tra le due strategie risolutive risulta preferibile. *

“Sia ABC un triangolo rettangolo in A . Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A . Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC .”

SVOLGIMENTO A



Consideriamo un sistema di assi cartesiani e in esso posizioniamo il triangolo ABC in modo tale che sia:

$$A(0; 0) \quad B(b; 0) \quad C(0; a);$$

siano H e K rispettivamente le distanze del punto O dalle rette AB e AC e siano

$$H(h; 0) \quad K(0; k) \quad O(h; k)$$

Vogliamo dimostrare che $\overline{OK} \cong \overline{OH}$.

Notiamo, innanzitutto, che il punto O appartiene all'asse del segmento $\overline{CB}$, essendo equidistante dagli estremi del segmento. Possiamo determinare l'equazione dell'asse facilmente perché possiamo calcolare le coordinate del punto M e l'equazione della retta CB , infatti:

$$M\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right); \quad \text{eq. di } CB: y = -\frac{a}{b}x + a$$

Dunque il coefficiente angolare della retta r sarà: $m_r = \frac{b}{a}$, pertanto l'equazione dell'asse sarà:

$$y - y_M = m_r(x - x_M) \quad \text{ovvero} \quad y - \frac{a}{2} = \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{da cui} \quad y = \frac{b}{a}x + \frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a}$$

Poiché il punto O appartiene a questa retta, le sue coordinate devono soddisfare l'equazione della retta, pertanto le coordinate di O saranno del tipo $O\left(h; \frac{b}{a}h + \frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a}\right)$.

D'altra parte, per una proprietà del quadrato, il segmento $\overline{OM}$ è sempre la metà del lato del quadrato, pertanto essendo $\overline{CB} = \sqrt{a^2 + b^2}$ sarà $\overline{OM} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Calcoliamo allora la distanza tra i punti O ed M e poniamola uguale a $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$:

$$\sqrt{\left(h - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}h + \frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{da cui, risolvendo si ottiene}$$

$$\sqrt{h^2 - bh + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2h^2}{a} - \frac{b^3h}{a^2} + \frac{b^4}{4a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{elevando entrambi i membri al quadrato e facendo}$$

semplici calcoli si giunge alla seguente equazione:

$$4(a^2 + b^2)h^2 - 4b(a^2 + b^2)h + b^4 - a^4 = 0 \quad \text{risolviamo l'equazione di secondo grado}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4b^2(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2)(b^4 - a^4) = 4b^2(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2)(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)$$

$$= (a^2 + b^2)^2(4b^2 - 4b^2 + 4a^2) = 4a^2(a^2 + b^2)^2$$

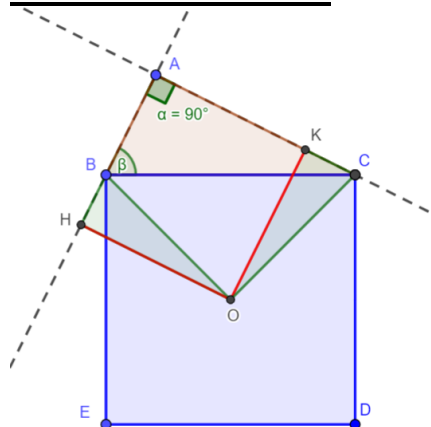
$$h = \frac{2b(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4a^2(a^2 + b^2)^2}}{4(a^2 + b^2)}$$

$$h_1 = \frac{2b(a^2 + b^2) - 2a(a^2 + b^2)}{4(a^2 + b^2)} = \frac{b-a}{2} \quad (\text{soluzione non accettabile perché corrisponde al punto O' simmetrico di O rispetto a CB})$$

$$h_2 = \frac{2b(a^2 + b^2) + 2a(a^2 + b^2)}{4(a^2 + b^2)} = \frac{b+a}{2}$$

Sostituendo il valore di h_2 al posto di h nelle coordinate del punto O si ottiene $O\left(\frac{b+a}{2}; \frac{b+a}{2}\right)$, pertanto risulta $\overline{OK} \cong \overline{OH}$, come volevamo dimostrare.

SVOLGIMENTO B



Dopo aver costruito la figura a sinistra secondo le indicazioni fornite dal problema, uniamo il centro O del quadrato con i punti B e C. Vogliamo dimostrare che $\overline{OH} \cong \overline{OK}$.

Consideriamo i triangoli BOH e OCK, essi hanno:

- $\overline{OB} \cong \overline{OC}$, perché entrambi metà della diagonale del quadrato BCDE;
- $\widehat{BHO} \cong \widehat{CKO}$, perché entrambi retti;
- $\widehat{HBO} \cong \widehat{KCO}$, infatti:

$$\widehat{HBO} = 180^\circ - \widehat{OCB} - \beta = 180^\circ - 45^\circ - \beta = 135^\circ - \beta$$

$$\widehat{KCO} = 90^\circ - \beta + 45^\circ = 135^\circ - \beta$$

Dunque i due triangoli sono congruenti per un particolare criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, avendo l'ipotenusa e un angolo acuto congruenti, pertanto la tesi risulta dimostrata.

* Le due risoluzioni sono state fornite dagli studenti, in base a quanto stabilito nel format delle *Mozioni dell'analisi comparativa*.